МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

**Обнинский институт атомной энергетики –**

филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

**(ИАТЭ НИЯУ МИФИ)**

Отделение интеллектуальных кибернетических систем

Индивидуальное домашнее задание №2

«Байесовская процедура оценки»

по дисциплине

«Дополнительные главы теории вероятностей и методов математической статистики»

Выполнил студент 1 курса

группы ИВТ-М20

Архипов Д. А.

Проверил:

доктор технических наук

Антонов А. В.

Обнинск, 2020

# Цель работы

С использованием байесовской процедурой оценивания оценить математическое ожидание и посчитать точность оценки. В качестве текущей выборки по заданному закону нормального распределения смоделировать полные наработки с помощью цензурирования интервалом. В качестве априорной информации используются выборки, полученные методом полных наработок.

Среднеквадратичное отклонение и мат ожидание для генерации выборки предполагаем m=300 .

# Теория

Оценка математического ожидания при известном значении среднеквадратического отклонения

Пусть в результате системных исследований группы однотипных объектов зафиксирована выборка , где – параметр, характеризующий исследуемый показатель сложной системы или анализируемого объекта. Исследователь располагает априорной информацией об анализируемом параметре объекта, однотипного с исследуемыми.

Пусть – выборка, зафиксированная на этапе априорных исследований. Будем считать, что случайные величины и имеют одну и ту же функцию распределения, то есть априорная и текущая информация однородны. В данном случае функция распределения нормальна и её плотность имеет вид

Основываясь на результатах априорных исследований, определим вид априорной плотности распределения параметра . Характеристическая функция каждой величины равна

Характеристическую функцию суммы независимых случайных величин определяем из соотношения

Тогда плотность распределения суммы независимых случайных величин будет иметь вид

Перейдем к переменной , получим распределение математического ожидания

Величина представляет собой дисперсию оценки параметра математического ожидания. Обозначим её через . Таким образом, получаем, что оценка математического ожидания имеет нормальное распределение

Данную плотность распределения примем в качестве априорной плотности распределения оцениваемого параметра, так как эта плотность построена на основании априорной информации об анализируемом параметре объекта.

Функция правдоподобия формируется на основании текущей информации и в случае нормального распределения случайной величины, характеризующей исследуемый показатель, она имеет вид

Согласно формуле Байеса, апостериорная плотность распределения

Преобразуем данное выражение, приведя его к общему знаменателю и раскрывая скобки, получаем

Апостериорное распределение для можно записать теперь в виде

Так как интеграл от этого выражения по области определения параметра должен равняться единице, то есть должно соблюдаться условие нормировки

Отсюда видно, что апостериорное распределение математического ожидания случайной величины также является нормальным. При том байесовская оценка параметра определяется выражение

Точность в определении оценки

Определим выигрыш в точности байесовской оценки математического ожидания по сравнению с оценкой этого параметра на основании только лишь текущей информации. Выигрыш в точности показывает, во сколько раз байесовская оценка точнее оценки, полученной только лишь на основании текущей информации. Выигрыш в точности определяется из выражения

В рассматриваемом случае получаем

Таким образом, получен следующий результат: использование априорной информации при оценивании математического ожидания нормального закона распределения всегда приводит к выигрышу в точности по сравнению с результатом, получаемым только на основании текущей информации.

# Ход работы

В качестве априорных данных возьмем результаты из предыдущего ИДЗ. Значения параметров остаются теми же.

Для оценивания воспользуемся методами, описанными выше для разных размеров априорной выборки n.

**n = 30, :**

273.1254

10.37238

32.13663

**n = 60, :**

307.9835

8.168085

40.80924

**n = 90, :**

289.0192

4.391849

75.89817

**n = 120, :**

300.3641

3.846101

86.66785

# Вывод

В ходе работы были изучены основные принципы работы использования байесовских процедур оценивания. На основе имеющихся данных были сгенерировали выборки и при помощи апостериорной плотности был оценены – математическое ожидание и его точность.

Изменяя размер априорных данных, мы убедились, что при заданных параметрах, при увеличении объема априорной информации, увеличивается точность мат ожидания и его оценки.

Причем использование Байесовского метода в любом случае давало улучшение точности оценки. Так мы убедились, что, предпочтительнее использовать этот метод, т.к. он дает более точный результат.